www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

EPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUES **(Durée de l'épreuve : 2 heures)**
OPTIONS M, P' ET T.A.

***

Objectif du problème :

Soit l'équation différentielle (E) du premier ordre $y'(x) = y^2(x) + x$.

On se propose de déterminer, ce qui fait l'objet de la partie II, un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant 0 et une fonction F dérivable dans I, solution de (E) dans cet intervalle I et vérifiant $F(0) = 0$.

L'utilisation d'un changement de fonction inconnue permet de ramener l'équation différentielle (E) à l'équation différentielle linéaire du second ordre (E_1) $z''(x) + xz(x) = 0$ et la recherche de I et de F à celle d'un intervalle J contenant 0 et d'une fonction f, solution de (E_1) sur J, vérifiant $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, qui ne s'annule pas dans I. Cette détermination fait l'objet de la première partie.

I - Etude de la solution f de (E_1)

1. Développement de f en série entière

a) Montrer qu'il existe une solution f de (E_1) sur $\mathbb{R}$ et une seule telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

b) Prouver que f est développable en série entière sous la forme

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \, a_p \, x^{3p},$$ où, pour tout entier naturel p,

a_p est strictement positif et déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

Dans la suite du problème, on pose, pour tout $p \geq 0$, $u_p(x) = a_p \, x^{3p}$ et $v_p(x) = u'_p(x)$.

2. Existence d'un zéro α de f dans $]0, 2[$

a) A partir du développement en série entière, déterminer les signes de f, f', f'' dans l'intervalle $]-\infty, 0]$ et les limites de ces fonctions en $-\infty$.

b) En comparant $\frac{v_{p+1}}{v_p}$ à 1, montrer que $f'(x)$ est strictement négatif dans l'intervalle $]0, 2]$.

En déduire qu'il existe un élément α de $]0, 2[$ et un seul tel que $f(\alpha) = 0$.

c) A l'aide de l'équation (E_1), étudier les signes de f, f', f'' dans l'intervalle $]0, 2]$.

d) Donner l'allure de la courbe représentative (C_1) de f sur l'intervalle $]-\infty, 2]$.

3. Détermination d'une valeur approchée de α

a) Déterminer un entier p tel que $u_p(2) < \frac{1}{2} .10^{-7}$ et en déduire des valeurs approchées de f(2) et de f(1,9) à 10^{-7} près.

Etablir que α appartient à l'intervalle $[1,9 ; 2]$.

b) En appliquant le premier pas de la méthode de Newton aux points $x = 1,9$ et $x = 2$, déterminer un encadrement $[\alpha_1, \alpha_2]$ de α ; on interprétera graphiquement α_1 et α_2 et on justifiera la précision obtenue.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

II - Etude de la solution F de (E)

1. Existence et unicité de F

a) Soit y une solution de (E) sur un intervalle ouvert I contenant le point 0 ;

montrer que la fonction z, définie pour tout élément x de I par :

$z(x) = \exp\left(-\int_0^x y(t)\,dt\right)$, est une solution de (E_1) sur l'intervalle

I ne s'annulant pas sur I et exprimer y en fonction de z.

b) En déduire qu'il existe une solution F de (E) sur $]-\infty, \alpha[$ et une seule telle que $F(0) = 0$. Déterminer le signe de F.

c) Déterminer la limite de F(x) lorsque x tend vers α. Prouver que, si $\alpha' > \alpha$, il n'existe aucune solution G de (E) sur $]-\infty, \alpha'[$ telle que $G(0) = 0$.

2. Etude des variations de F

On note (C) la courbe représentative de F. Dans toute la suite, on note g la fonction définie sur $]-\infty, \alpha[$ par $g(x) = f'^2(x) + x f^2(x)$.

a) Etudier le signe de g, en déduire le sens de variation de F sur $]-\infty, \alpha[$.

b) Montrer que, pour tout élément x de $]-\infty, 0]$, (1) $x(F^2(x) + x) - 2F(x) \leqslant 0$.

A cet effet, on exprimera le premier membre à l'aide de f et f' et on étudiera le signe de la fonction h définie sur $]-\infty, 0]$ par :

$$h(x) = xf'^2(x) + 2f(x)f'(x) + x^2 f^2(x).$$

c) Etablir que, pour tout élément x de $]-\infty, 0[$, (2) $0 \leqslant \sqrt{-x} - F(x) \leqslant -\frac{2}{x}$.

Interprétez graphiquement ce résultat.

d) A l'aide de (1) et de (2), déterminer la limite de F' en $-\infty$.

e) Dresser le tableau de variations de F.

3. Etude de la convexité de F

Soit ψ la fonction définie sur $]-\infty, \alpha[$ par $\psi = f^3 F''$.

a) Etudier le signe de ψ' sur $]-\infty, \alpha[$. A cet effet, on introduira la fonction auxiliaire φ définie sur $]-\infty, \alpha[$ par :

$$\varphi(x) = f(x)\,f'(x) + 2x\,f'^2(x) + 2x^2\,f^2(x).$$

On étudiera son sens de variation, puis son signe. En déduire que ψ est strictement croissante sur $]-\infty, \alpha[$.

b) A partir des résultats établis dans la question 2) précédente, étudier le signe de F'' dans $[0, \alpha[$ et prouver que F'' s'annule en au moins un point de $]-\infty, 0[$.

c) Etablir finalement que F'' s'annule en un point β et un seul de $]-\infty, 0[$.

d) A partir des développements en série entière de f et de f',... on donne les valeurs approchées suivantes à 10^{-5} près (ce qu'on ne demande pas de justifier) :

$f(-1,2) = 1,30499$, $f(-1,19) = 1,29701$,
$f'(-1,2) = 0,80598$, $f'(-1,19) = 0,79043$.

En déduire que $-1,2 < \beta < -1,19$.

4. A partir de l'étude précédente, donner l'allure de (C).

FIN DU PROBLEME

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail